OPERACIONES CON POLINOMIOS 2.

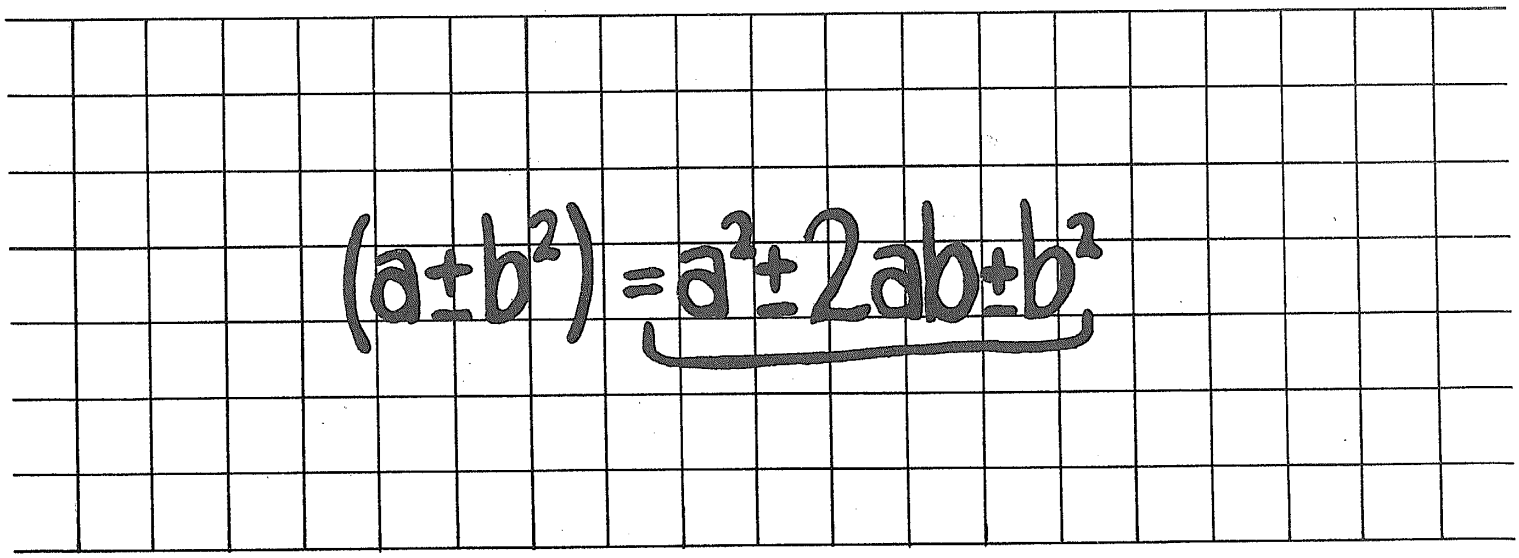
Productos notables

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. Operaciones con enteros
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. ***Operaciones con polinomios 2. Productos notables***
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. El conjunto de los racionales
11. Operaciones con expresiones racionales
12. El conjunto de los reales
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 1

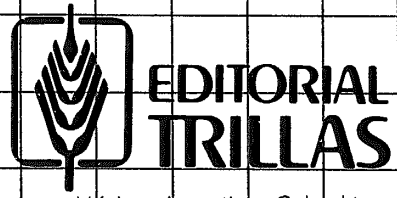
Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 8

OPERACIONES CON POLINOMIOS 2.

Productos notables

Conrado Flores García



México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
OPERACIONES CON POLINOMIOS 2. Productos notables
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1508-X

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

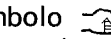
Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta*. Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo  , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

8.1 Potenciación de monomios 9

8.2 Productos notables 17

8.3 Producto de dos binomios conjugados 27

8.4 Producto de dos binomios con un término común 35

8.5 Producto de dos binomios de la forma $ax + b$ 45

8.6 Producto de un binomio de la forma $x \pm y$ y un trinomio de la forma $x^2 - xy \mp y^2$ 54

8.7. Potenciación de un binomio 67

8.8 Resumen de productos notables 77

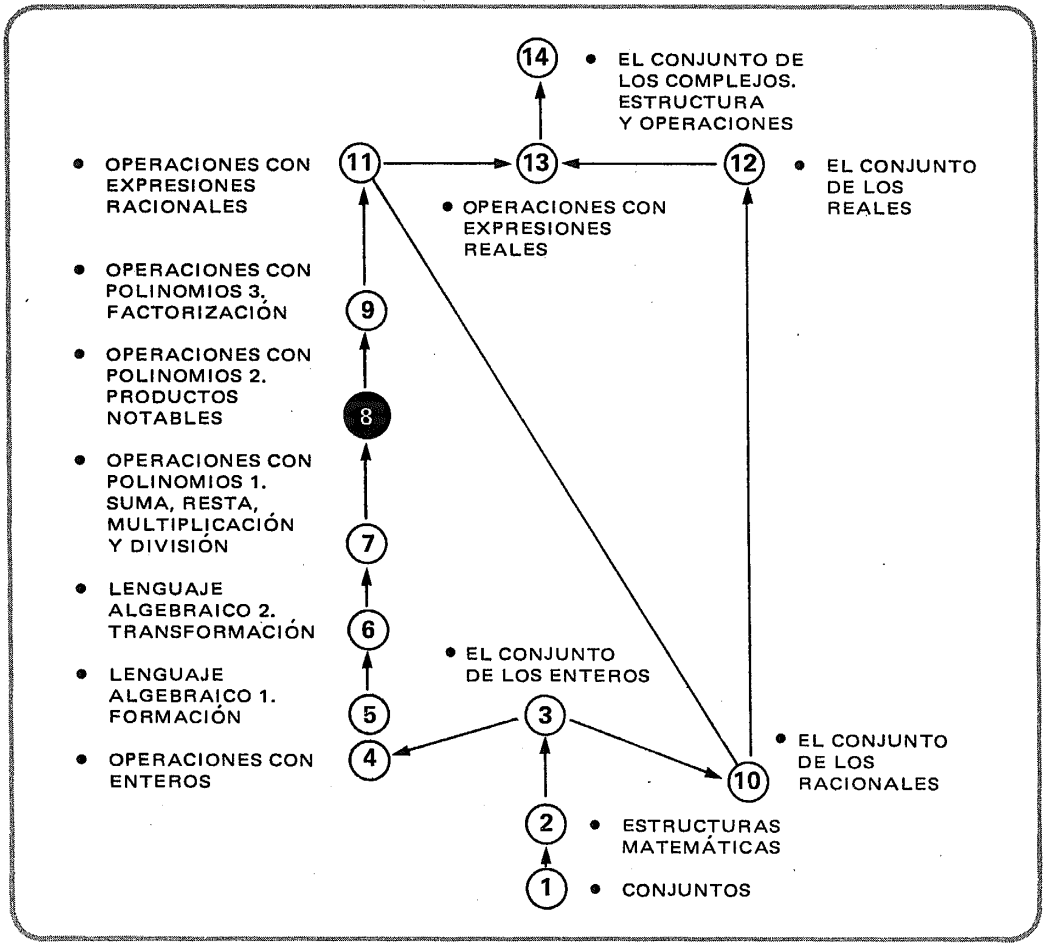
8.9 Evaluación de polinomios por sustitución 79

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 8. Operaciones con polinomios
2. Productos notables

Objetivos: dar, por simple inspección, el polinomio o resultado de un "producto notable" de polinomios

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Suma, resta y multiplicación de polinomios con coeficientes enteros	1	7

8.1

Potenciación de monomios

1

Un monomio:

$3x$

Su cuadrado
(segunda potencia)

↳ ⌊_____⌋

Estudiar con atención.

$(3x)^2$
$= 3x \cdot 3x$
$= 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x$
$= 9x^2$

2

$(3x)^3 =$ ⌊_____⌋

$(3x)^3$
$= 3x \cdot 3x \cdot 3x$
$= \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}\cdot\underbrace{x \cdot x \cdot x}$
$= \underbrace{3^3}\underbrace{x^3}$
$= 27x^3$

3

$(5x^2)^2 = \square$

$(5x^2)^2$
$= 5x^2 \cdot 5x^2$
$= \underbrace{5 \cdot 5} \cdot \underbrace{x^2 \cdot x^2}$
$= 25x^4$

4

$(5x^2)^3 = \square$

$(5x^2)^3$
$= 5x^2 \cdot 5x^2 \cdot 5x^2$
$= \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5} \cdot \underbrace{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2}$
$= 5^3 \, x^6$
$= 125x^6$

5

$(2x^2 \, y^3)^2 = \square$

Observar cuidadosamente los resultados:

$(2x^2y^3)^2$
$= 2x^2y^3 \cdot 2x^2y^3$
$= \underbrace{2 \cdot 2} \cdot \underbrace{x^2 \cdot x^2} \cdot y^3 \cdot y^3$
$= 4x^4y^6$

6

$(2x^2y^3)^3 = \square$

Observar cuidadosamente los resultados:

$(2x^2y^3)^3$
$= 2x^2y^3 \cdot 2x^2y^3 \cdot 2x^2y^3$
$= 2^3(x^2)^3\ (y^3)^3$
$= 8x^6y^9$

7

$(x^2)^3 = \square$

$(x^2)^3$
$= x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$
$= x^6$

8

$(x^3)^2 = \square$

$(x^3)^2$
$= x^3 \cdot x^3$
$= x^6$

9

$(x^5)^3 = \square$

$(x^5)^3$
$= x^5 \cdot x^5 \cdot x^5$
$= x^{15}$

10

En general:

$(x^n)^2 = \square$

Atención.

$(x^n)^2$
$= x^n \cdot x^n$
$= x^{2n}$

11

En general:

$(x^n)^3 = \square$

Atención.

$= (x^n)^3$
$= x^n \cdot x^n \cdot x^n$
$= x^{3n}$

12

En forma todavía más general:

$(x^n)^m =$ ____

Atención.

$(x^n)^m = x^{n\,m}$

13

$(a^3 b^2 c^4)^2 =$ ____

$a^6 b^4 c^8$

14

$(a^3 b^2 c^4)^3 =$ ____

$a^9 b^6 c^{12}$

15

$(a^3 b^2 c^4)^5 =$ _____

$a^{15} b^{10} c^{20}$

16

$(3x^2 y^5 z)^4 =$ _____

$81x^8 \ y^{20} \ z^4$

17

$(2xy^3 z^4)^6 =$ _____

$64x^6 y^{18} z^{24}$

18

$(-3x^2)^2 =$ _____

$9x^4$

19

$(-2x^3)^5 =$ _____

$-32x^{15}$

20

$(-ab^3)^3 =$ _____

$-a^3b^9$

1.8.1.1

Establecimiento de una **regla para la determinación del signo de potencias pares o impares de monomios** y práctica adicional de **potenciación de monomios en** $\mathbb{Z}$, si se considera necesario.

1.8.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* la potenciación de monomios con coeficientes enteros.

8.2

Productos notables

21

Cuadrado de la
suma de dos números

22

Dos binomios iguales:

$a + b$ $\qquad$ $a + b$

Su producto

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

23

Observar el resultado con atención:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\downarrow$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

24

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Intentemos expresar esto en lenguaje común:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Por ejemplo:

El cuadrado de la suma de dos números es igual a:

- el cuadrado del primer número
- más el doble producto del primero por el segundo número
- más el cuadrado del segundo número

25

Escribamos el resultado,
de acuerdo con la regla anterior:

$(3 + 4)^2 =$ _____

$3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 4^2$
$= 9 + 24 + 16$
$= 49$
En efecto:
$7^2 = 49$

26

$(x + y)^2 =$ _____

$x^2 + 2xy + y^2$

27

$(x + 2y)^2 =$ _____

$x^2 + 4xy + 4y^2$

28

$(3x + 1)^2 =$ _____

$9x^2 + 6x + 1$

29

$(3a + 2b)^2 =$ _____

$(3a)^2 + 2(3a)(2b) + (2b)^2$
$= 9a^2 + 12ab + 4b^2$

30

$(1 + xy)^2 =$ _____

$1 + 2 \cdot 1 \cdot xy + (xy)^2$
$= 1 + 2xy + x^2y^2$

31

$(x^2 + 2xy)^2 = \square$

$(x^2)^2 + 2(x^2)(2xy) + (2xy)^2$
$= x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2$

1.8.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario

32

Cuadrado de la
diferencia de dos números

33

Dos binomios iguales:

$a - b$ $\qquad$ $a - b$

Su producto

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

34

Observar con atención el resultado:

$$(a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\downarrow$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

35

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Expresión en lenguaje común:

Respuesta en el cuadro siguiente

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Por ejemplo:

El **cuadrado de la diferencia** de dos números es igual a:

- el cuadrado del primer número
- **menos** el doble producto del primero por el segundo número
- **más** el cuadrado del segundo número

36

Escribir el resultado por simple inspección:

$(3x - 2)^2 =$ _____

Si se tiene duda, efectuar la multiplicación correspondiente.

$9x^2 - 12x + 4$

37

$(1 - x^2)^2 =$ _____

$1 - 2x^2 + x^4$

38

$(x^2 - y^2)^2 =$ _____

$x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

39

$(x^3 - y^3)^2 =$ _____

$x^6 - 2x^3y^3 + y^6$

40

$(3xy - 4yz)^2 =$ _____

$9x^2y^2 - 24xy^2z + 16y^2z^2$

1.8.2.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

41

Cuadrado de la suma
o diferencia de dos
números

42

Si combinamos las dos
identidades encontradas, obtenemos:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

A una expresión
de esta forma
se le llama:

trinomio cuadrado perfecto

43

Interpretemos esto como un proceso de

transformación de un producto en una suma:

$(a \pm b)^2 \longrightarrow a^2 \pm 2ab + b^2$

Estado inicial: **cuadrado de un binomio o producto de dos binomios iguales.**

Estado final: **trinomio cuadrado perfecto**

44

Tomemos nota de esta expresión que será muy usada de aquí en adelante:

Trinomio cuadrado perfecto:

$a^2 \pm 2ab + b^2$

1.8.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *escribir*, por simple inspección el resultado de las operaciones $(a + b)^2$ y $(a - b)^2$, siendo a y b monomios cualesquiera con coeficientes enteros.

8.3

Producto de dos binomios conjugados

45

Dos binomios **conjugados**:

$a + b$ $\qquad$ $a - b$

Su producto

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{-ab-b^2} \\ a^2 \qquad -b^2 \end{array}$$

46

Estudiar con atención, esta identidad e intentar expresarla en lenguaje común:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Por ejemplo:

El producto de la suma y la diferencia de dos números es igual a:

- la diferencia de los cuadrados de dichos números.

47

Un binomio:

$3x - 2$

Su conjugado

↳ _____

$3x + 2$

48

$4a - 2$

Binomio conjugado

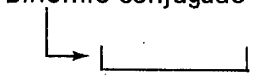
↳ _____

$4a + 2$

49

$k^2 + 8$

Binomio conjugado

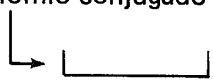


$k^2 - 8$

50

$-3 + 4a$

Binomio conjugado



$-3 - 4a$

1.8.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

51

Escribir el resultado
por simple inspección:

$(m + n)(m - n) =$ _____

Si se tiene duda,
efectuar la multiplicación.

$m^2 - n^2$

52

$(x + y)(x - y) =$ _____

$x^2 - y^2$

53

$(5 + 2)(5 - 2) =$ _____

$5^2 - 2^2$
$= 25 - 4 = 21$

En efecto:

$7 \times 3 = 21$

54

$(3x + y)(3x - y) =$ _____

$9x^2 - y^2$

55

$(2x + 1)(2x - 1) =$ _____

$4x^2 - 1$

56

$(a^2 + b)(a^2 - b) =$ _____

$a^4 - b^2$

57

$(2xy - y^2)(2xy + y^2) =$ _____

$4x^2y^2 - y^4$

58

$(4x^2y^2 + 2)(4x^2y^2 - 2) =$ _____

$16x^4y^4 - 4$

59

$(a^{10} - b^{10})(a^{10} + b^{10}) =$ _____

$a^{20} - b^{20}$

60

$(a^n - b^m)(a^n + b^m) =$ _____

$a^{2n} - b^{2m}$

61

$(5 + x)(5 - x) =$ _____

$5^2 - x^2$
ó
$25 - x^2$

62

$(n + 1)(n - 1) =$ _____

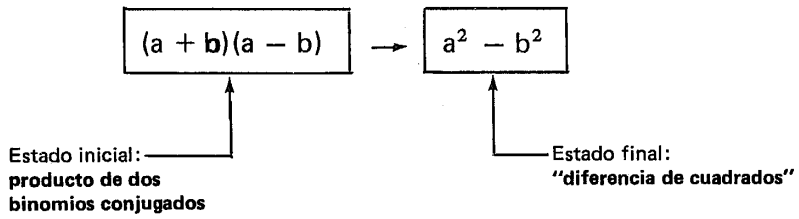
$n^2 - 1$

1.8.3.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

63

Producto de dos binomios conjugados
interpretado como un proceso de
transformación de un producto en una suma:



1.8.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *escribir* el **conjugado** de un binomio dado;
- *dar*, por simple inspección, el resultado de la operación (a + b)(a − b), en que a y b son monomios con coeficientes enteros.

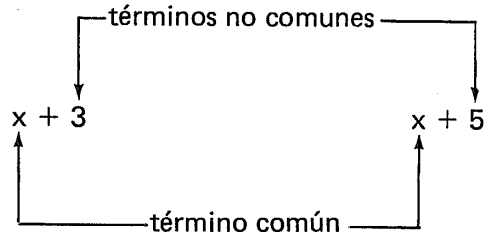
8.4

Producto de dos binomios con un término común

64

Atención.

Tenemos dos **binomios con un término común:**



65

Dos binomios con un término común:

$x + 1$ $x - 2$

Término común |____|

x

66

Dos binomios con un término común:

$a + 5$ $a - 7$

Término común [_____]

a

67

Dos binomios con un término común:

$3a + 2$ $3a - 5$

Término común [_____]

3a

68

Dos binomios con un término común:

$x^2 + 3$ $x^2 + 5$

Término común [_____]

x^2

69

Dos binomios con un término común:

$x + a$ $\qquad$ $x + b$

Su producto

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ \quad +bx+ab \\ \hline x^2+ax+bx+ab \end{array}$$

70

Apliquemos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

$$a^2 + \underbrace{ax + bx} + ab$$

$$x^2 + \boxed{} + ab$$

$(a + b)\,x$

71

Ahora observemos con atención esta identidad e intentemos expresarla en lenguaje común:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)\,x + ab$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Por ejemplo:

El producto de dos binomios con un término común es igual a:

- el cuadrado del término común.
- más el producto de la suma de los términos no comunes por el término común
- más el producto de los términos no comunes

72

Escribir el resultado por simple inspección:

$(x + 3)(x + 2) =$ _____

$x^2 + 5x + 6$

73

$(x + 4)(x + 5) =$ _____

$x^2 + 9x + 20$

74

$(a + 7)(a + 8) =$ _____

$a^2 + 15a + 56$

75

$(m + 5)(m + 10) =$ _____

$m^2 + 15m + 50$

76

$(n + m)(n + p) =$ _____

$n^2 + (m + p)\,n + mp$

77

$(x^2 + 3)(x^2 + 5) =$ _____

$x^4 + 8x^2 + 15$

78

$(x^3 + 4)(x^3 + 5) =$ _____

$x^6 + 9x^3 + 20$

79

$(x^n + a)(x^n + b) =$ _____

$x^{2n} + (a + b)\,x^n + ab$

80

$(x - 5)(x + 2) =$ ____

$x^2 - 3x - 10$

81

$(x - 2)(x - 7) =$ ____

$x^2 - 9x + 14$

82

$(a + 1)(a - 1) =$ ____

$a^2 + 0 \cdot a - 1$
$= a^2 - 1$

Observar que $(a + 1)(a - 1)$ es también un producto de dos binomios conjugados.

83

$(3x - 2)(3x + 3) =$ _____

$=$ _____

$9x^2 + 1(3x) - 6$

$= 9x^2 + 3x - 6$

84

$(5x - 3)(5x + 6) =$ _____

$=$ _____

$25x^2 + 3(5x) - 18$

$= 25x^2 + 15x - 18$

85

$(3a + b)(3a - c) =$ _____

$9a^2 + (b - c)\,3a - bc$

86

$(y - 7)(y - 5) =$ _____

$y^2 - 12y + 35$

87

$(z - 3)(z + 9) =$ _____

$z^2 + 6z - 27$

88

$(3 + k)(5 + k) =$ _____

$k^2 + 8k + 15$
ó
$15 + 8k + k^2$

1.8.4.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario

89

Producto de dos binomios con un término común interpretado como un proceso de **transformación de un producto en una suma:**

$$(x + a)(x + b) \longrightarrow x^2 + (a + b)\,x + ab$$

Estado inicial: **producto de dos binomios con un término común**

Estado final: **trinomio cuadrático de la forma:**

$x^2 + px + q$

con

$p = a + b$ y $q = ab$

1.8.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *escribir*, por simple inspección, el producto de dos binomios con un término común.

8.5

Producto de dos binomios de la forma ax + b

90

Binomios de la forma $ax + b$

$a, b \in \mathbb{Z}$ y x es un monomio en $\mathbb{Z}$.

$3x + 2$	$2x + 4$	$7x + 2$
$5a + 3$	$7m - 1$	$15x - 3$
$6y - 1$	$10n + 20$	$kx - n$
$7m + 4$	$8x^2 - 8$	$nx^m + p$
$-10x + 7$	$x + 6$	$cx - d$
$-3x - 6$	$-2x - 3$	$at - b$

91

Dos binomios de la forma $ax + b$:

$ax + b$ $\quad$ $cx + d$

Su producto

$$\begin{array}{r} ax+b \\ cx+d \\ \hline acx^2+bcx \\ \quad adx+bd \\ \hline acx^2+bcx+adx+bd \end{array}$$

92

$$acx^2 + \underbrace{bcx + adx} + bd$$

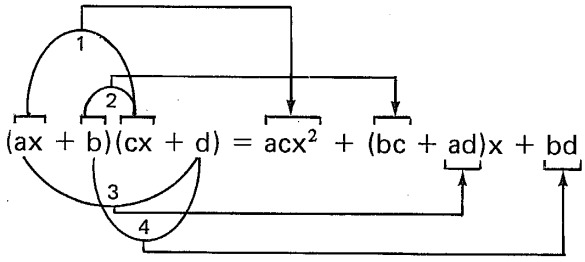
Aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

$$acx^2 + \boxed{\qquad\qquad} + bd$$

$(bc + ad)x$

93

Observemos cuidadosamente el resultado; los numerales indican el orden en que pueden efectuarse las operaciones:



94

Escribir el resultado por simple inspección:

$$(3x + 2)(2x + 5) = \boxed{\qquad\qquad}$$

En caso de duda, efectuar la multiplicación.

$$6x^2 + \underbrace{4x + 15x} + 10$$
$$= 6x^2 + 19x + 10$$

95

$(6x + 1)(3x + 4) =$ _____

$18x^2 + 3x + 24x + 4$

$= 18x^2 + 27x + 4$

96

$(2a + 7)(3a + 5) =$ _____

$6a^2 + 21a + 10a + 35$

$= 6a^2 + 31a + 35$

97

$(a + 10)(5a + 2) =$ _____

$5a^2 + 50a + 2a + 20$

$= 5a^2 + 52a + 20$

98

$(3x^2 + 2)(4x^2 + 1) =$ ____

$12x^4 + \underbrace{8x^2 + 3x^2} + 2$

$= 12x^4 + 11x^2 + 2$

99

$(4a^3 + 5)(3a^3 + 3) =$ ____

$12a^6 + \underbrace{15a^3 + 12a^3} + 15$

$= 12a^6 + 27a^3 + 15$

100

$(8a^n + 2)(3a^n + 1) =$ ____

$24a^{2n} + \underbrace{6a^n + 8a^n} + 2$

$= 24a^{2n} + 14a^n + 2$

101

$(ax^n + b)(cx^n + d) =$ ____

$acx^{2n} + \underbrace{bcx^n + adx^n} + bd$

$= acx^{2n} + (bc + ad)x^n + bd$

102

$(3x + 2)(2x - 5) =$ ____

$6x^2 + \underbrace{4x - 15x} - 10$

$= 6x^2 - 11x - 10$

103

$(2x - 7)(4x + 9) =$ ____

$8x^2 - \underbrace{28x + 18x} - 63$

$= 8x^2 - 10x - 63$

104

$(3x - 5)(4x - 7) =$ _____

$12x^2 - 20x - 21x + 35$

$= 12x^2 - 41x + 35$

105

$(10x - 3)(15x - 2) =$ _____

$150x^2 - 45x - 20x + 6$

$= 150x^2 - 65x + 6$

106

$(3x^2 - 2)(9x^2 - 4) =$ _____

$27x^4 - 18x^2 - 12x^2 + 8$

$= 27x^4 - 30x^2 + 8$

107

$(8x^3 - 1)(3x^3 + 2) =$ ____

$24x^6 \underbrace{- 3x^3 + 16x^3}_{} - 2$

$= 24x^6 + 13x^3 - 2$

108

$(7x^n - 2)(5x^n + 3) =$ ____

$35x^{2n} \underbrace{- 10x^n + 21x^n}_{} - 6$

$= 35x^{2n} + 11x^n - 6$

109

$(3x^{10} + 4)(2x^{10} - 5) =$ ____

$6x^{20} \underbrace{+ 8x^{10} - 15x^{10}}_{} - 20$

$= 6x^{20} - 7x^{10} - 20$

110

$(kx^n + p)(kx^n - q) =$ ____

$k^2x^{2n} + \underbrace{kpx^n - kqx^n} - pq$

$= k^2x^{2n} + (p - q)kx^n - pq$

111

$(3x - 2)(3x + 3) =$ ____

$9x^2 - \underbrace{6x + 9x} - 6$

$= 9x^2 + 3x - 6$

1.8.5.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

Producto de dos binomios de la forma ax + b, como un proceso de **transformación de un producto en una suma:**

$$(ax + b)(cx + d) \longrightarrow acx^2 + (bc + ad)x + bd$$

Estado inicial: **producto de dos binomios de la forma: ax + b**

Estado final: **trinomio cuadrático de la forma:**

$px^2 + qx + r$

con $p = ac$,

$q = bc + ad$ y $r = bd$

1.8.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el producto de dos binomios de la forma: ax + b, aplicando la identidad: $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (bc + ad)x + bd$ en que a, b, c, d son números enteros, y x es un monomio entero.

8.6

Producto de un binomio de la forma $x \pm y$
y un trinomio de la forma $x^2 - xy \mp y^2$

113

observar signos

Modelo $\longrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Señalar los productos que **no** correspondan al modelo indicado:

$(3a + b)(9a^2 - 3ab + b^2)$ $\qquad$ $(3 + a)(9 - 6a + a^2)$

$(n + 2m)(n^2 - 2mn + 4m^2)$ $\qquad$ $(3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$

$(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$ $\qquad$ $(5x + 3)(5x^2 - 15x + 9)$

$(y + 4)(y^2 + 4y + 16)$ $\qquad$ $(a + b)(a^2 - ab - b^2)$

$(y+4)(y^2+4y+16)$

$(3+a)(9-6a+a^2)$

$(5x+3)(5x^2-15x+9)$

$(a+b)(a^2-ab-b^2)$

114

Efectuar la multiplicación:

$(x + y)(x^2 - xy + y^2) =$ _____

$$\begin{array}{r} x^2 - xy + y^2 \\ x + y \\ \hline x^3 - x^2y + xy^2 \\ x^2y - xy^2 + y^3 \\ \hline x^3 + 0 + 0 + y^3 \end{array}$$

115

Obtenemos la siguiente expresión, que debemos estudiar con atención.

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$$

116

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

¿Corresponde al modelo estudiado?

Sí/No

Sí

117

Entonces:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad \underline{\qquad\qquad}$$

$a^3 + b^3$

118

$(3x + 1)(9x^2 - 3x.+ 1)$

¿Corresponde al modelo estudiado?

Sí/No

Sí

119

Entonces:

$(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1) =$ [ ]

$27x^3 + 1$

120

$(3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$

¿Corresponde al modelo estudiado?

Sí/No

Sí

121

Entonces:

$(3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2) =$ _____

$27a^3 + 8b^3$

122

$(x + 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$

¿Corresponde al modelo estudiado?

Sí/No

No

123

$(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

¿Corresponde al modelo estudiado?

Sí/No

Sí

124

Entonces:

$(x + 3)(x^2 - 3x + 9) =$ _____

$x^3 + 27$

125

$(n + m)(n^2 - 2mn + m^2)$

¿Corresponde al modelo estudiado?

Sí/No

No

126

$(5 + x^2)(25 - 5x^2 + x^4)$

¿Corresponde al modelo estudiado?

Sí/No

Sí

127

Entonces:

$(5 + x^2)(25 - 5x^2 + x^4) =$ ⌊_____⌋

$125 + x^6$

1.8.6.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

128

Producto de un binomio de la forma:

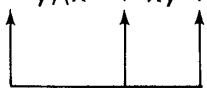
$x - y$

y un trinomio de la forma:

$x^2 + xy + y^2$

129

Modelo $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$



observar los signos

130

Efectuar la multiplicación:

$(x - y)(x^2 + xy + y^2) =$ ⌊_____⌋

$$\begin{array}{r} x^2 + xy + y^2 \\ \quad x - y \\ \hline x^3 + x^2y + xy^2 \\ \quad - x^2y - xy^2 - y^3 \\ \hline x^3 + 0 + 0 - y^3 \end{array}$$

131

Observemos con mucha atención:

$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

132

$(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

¿Corresponde al modelo?

Sí / No

Sí

133

Entonces:

$(x - 3)(x^2 + 3x + 9) =$ _____

$x^3 - 27$

134

$(4a - 5b)(16a^2 + 20ab + 25b^2)$

¿Corresponde al modelo?

Sí / No

Sí

135

$(4a - 5b)(16a^2 + 20ab + 25b^2) =$ _____

$64a^3 - 125b^3$

136

$(a - 4)(a^2 + 8a + 16)$

¿Corresponde al modelo?

Sí/No

No

137

$(2 - x)(2x^2 + 2x + 4)$

¿Corresponde al modelo?

Sí/No

No

138

$(2 - x)(\square)$

Completar la expresión para que corresponda al modelo.

$4 + 2x + x^2$

139

$(2 - x)(4 + 2x + x^2) = \square$

$8 - x^3$

140

$(m - 2n)(\square) = \square$

Completar la expresión para que corresponda al modelo:

$(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2) = m^3 - 8n^3$

141

$(k-1)(\square) = \square$

Completar la expresión para que corresponda al modelo:

$(k-1)(k^2+k+1) = k^3 - 1$

142

$(a^2 - b^2)(\square) = \square$

$(a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$
$= a^6 - b^6$

143

$(a^n - b^n)(\square) = \square$

$(a^n - b^n)(a^{2n} + a^nb^n + b^{2n}$
$= a^{3n} - b^{3n}$

1.8.6.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

144

Al combinar las dos últimas expresiones estudiadas, obtenemos la siguiente, para el

producto de un binomio de la forma a ± b y un trinomio de la forma $a^2 \mp ab + b^2$:

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$$

145

Producto de un binomio de la forma a ± b y un trinomio de la forma $a^2 \mp ab + b^2$ interpretado como un proceso de **transformación de un producto en una suma:**

$$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \rightarrow a^3 \pm b^3$$

Estado inicial: **producto de un binomio de la forma $(a \pm b)$ y de un trinomio de la forma $(a^2 \mp ab + b^2)$**

Estado final: **"suma o diferencia de cubos"**

1.8.6.3

Práctica adicional
de **aplicación de la regla:**
$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$
si se considera necesario.

1.8.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el producto de un binomio de la forma $a \pm b$ y un trinomio de la forma $a^2 \mp ab + b^2$, aplicando la identidad: $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

8.7

Potenciación de un binomic

146

Busquemos una expresión
equivalente
en forma de suma
para este producto
de n factores binomios iguales:

$$(x \pm y)^n$$

$n \in \mathbb{N}$

147

Para empezar:

$$(x + y)^0 = \boxed{}$$

1

148

$(x + y)^1 =$ ____

$x + y$

149

$(x + y)^2 =$ ____

$x^2 + 2xy + y^2$

150

Ahora, queremos:

$(x + y)^3 =$ ____

Efectuar la multiplicación correspondiente:

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

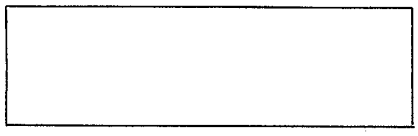
↑

$(x^2 + 2xy + y^2)(x + y)$

151

$(x + y)^4 =$ ____

Efectuar la multiplicación:



$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

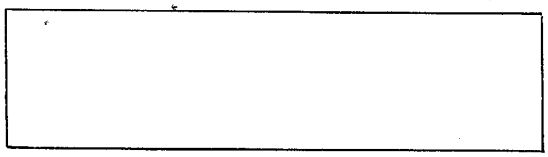
↑

$(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(x + y)$

152

$(x + y)^5 =$ ____

Efectuar la multiplicación:



Respuesta
en el
cuadro siguiente

$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

153

Analicemos con mucha atención los resultados que hemos obtenido:

- $(x + y)^0 = 1$
- $(x + y)^1 = x + y$
- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

154

¿Qué observación podemos hacer en relación con el **número de términos** que tiene la expresión equivalente de $(x + y)^n$?

El número de términos es igual a $n + 1$.

155

¿Qué observamos en relación con las potencias del primer término del binomio, es decir, de x?

Por ejemplo, que:

- la mayor potencia de x es x^n
- las potencias de x aparecen en orden descendente, de x^n a x^0

156

¿Qué observamos en relación con las potencias del segundo término del binomio, es decir, de y?

Por ejemplo, que:

- la mayor potencia de y es y^n
- las potencias de y aparecen en orden ascendente, de y^0 a y^n

157

Apliquemos las observaciones anteriores al escribir el resultado de

$$(x + y)^6$$

por simple inspección.
No sabemos nada todavía acerca de los coeficientes.

Véase cuadro siguiente

158

$$(x + y)^6 = \boxed{?}\, x^6 + \boxed{?}\, x^5 y + \boxed{?}\, x^4 y^2 + \boxed{?}\, x^3 y^3 + \boxed{?}\, x^2 y^4 + \boxed{?}\, xy^5 + \boxed{?}\, y^6$$

Número de términos = 6 + 1 = 7

159

El coeficiente de x^6 es [ ]

El coeficiente de y^6 es [ ]

1

1

160

Observemos con atención y anotemos los coeficientes de $x^5 y$ y xy^5.

$$(x+y)^6 = x^6 + \square x^5 y + \boxed{?} x^4 y^2 + \boxed{?} x^3 y^3 + \boxed{?} x^2 y^4 + \square xy^5 + y^6$$

Respuesta en el cuadro siguiente

$$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5 y + \square x^4 y^2 + \square x^3 y^3 + \square x^2 y^4 + 6xy^5 + y^6$$

Necesitamos una regla para calcular los demás coeficientes.

161

Intentemos **establecer una regla** para el calculo de los coeficientes del polinomio resultante de $(x + y)^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

162

He aquí una fórmula establecida por Newton:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots b^n$$

$2! = 1 \times 2$, y se lee "factorial de 2"
$3! = 1 \times 2 \times 3$, y se lee "factorial de 3"
etc.,

163

Completar el polinomio de acuerdo con la regla de Newton:

$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + \square x^4y^2 + \square x^3y^3 + \square x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

Respuesta en el cuadro siguiente

Observar la **simetría** en la disposición de los coeficientes.

$$(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

164

Blas Pascal dispuso los coeficientes en la siguiente forma:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

etcétera

165

Ahora:

$(x - y)^0 =$ ⌊____⌋

$(x - y)^1 =$ ⌊_____⌋

$(x - y)^2 =$ ⌊_____⌋

$(x - y)^3 =$ ⌊_____⌋

$(x - y)^4 =$ ⌊_____⌋

$(x - y)^5 =$ ⌊_____⌋

Nota: Efectuar las operaciones necesarias.

Respuesta en el cuadro siguiente

Observar con atención la alternancia de los signos en los polinomios resultantes.

$(x - y)^0 = 1$

$(x - y)^1 = x - y$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

$(x - y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

166

Expresión general de **Newton:**

$$(x \pm y)^n = x^n \pm nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \ldots \pm y^n$$

Por el momento:

$x, y \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}$

1.8.7.1

Práctica de $(x \pm y)^n$, $n \in \mathbb{N}$,
si
se considera necesario.

1.8.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el polinomio correspondiente a $(a \pm b)^n$ para un valor dado de $n \in \mathbb{N}$, siendo a y b monomios en $\mathbb{Z}$.

8.8

Resumen de productos notables

167

PRODUCTOS NOTABLES		
Estado inicial	Expresión algebraica	Estado final
1. Cuadrado de un binomio	$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$	Trinomio cuadrado perfecto
2. Producto de dos binomios conjugados	$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$	"Diferencia de cuadrados"
3. Producto de dos binomios con un término común	$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	Trinomio cuadrático de la forma $x^2 + px + q$
4. Producto de dos binomios de la forma: $ax + b$	$(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (bc+ad)x + bd$	Trinomio cuadrático de la forma $px^2 + qx + r$
5. Producto de un binomio $(x \pm y)$ y un trinomio $(x^2 \mp xy + y^2)$	$(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) = x^3 \pm y^3$	"Suma o diferencia de cubos"
6. Potencia n-ésima de un binomio	$(x \pm y)^n = x^n \pm nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \ldots \pm y^n$	Polinomio "potencia n-ésima" perfecto

1.8.8.1

Práctica miscelánea de los seis casos estudiados de productos notables.

1.8.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar*, por simple inspección, los resultados de las operaciones siguientes:

  $(x \pm y)^2$
  $(x + y)(x - y)$
  $(x + a)(x + b)$
  $(ax + b)(cx + d)$
  $(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$
  $(x \pm y)^n$

  siendo x, y, a, b, c, d monomios con coeficientes enteros, y n un número natural.

8.9

Evaluación de polinomios por sustitución

168

Un polinomio en $\mathbb{Z}$:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Su valor para $x = 2$ es:

$P(2) =$ ⌊_____⌋

$(2)^3 + 3(2)^2 + 3(2) + 1$

$= 8 + 12 + 6 + 1$

$= 27$

169

$$P(x) = x^2 - 2x + 1$$

$P(3) =$ ⌊_____⌋

$(3)^2 - 2(3) + 1$

$= 9 - 6 + 1$

$= 4$

170

$P(x) = 4x^4 - 5x^3 + 8x - 2$

$P(1) =$ _____

$4(1)^4 - 5(1)^3 + 8(1) - 2$

$= 4 - 5 + 8 - 2$

$= 5$

171

$P(x, y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$P(2, 1) =$ _____

$4(2)^2 + 12(2)(1) + 9(1)^2$

$= 16 + 24 + 9$

$= 49$

172

$P(x, y) = 5x^3 - 4x + 8y$

$P(1, 0) =$ _____

$5(1)^3 - 4(1) + 8(0)$

$= 5 - 4 + 0$

$= 1$

173

En los cuadros siguientes encontraremos algunos ejemplos de **verificación del resultado de una operación** con polinomios, por evaluación de éstos para sustitutos seleccionados arbitrariamente.

174

Una multiplicación:

Para $x = 1$ y $y = 2$

$$\begin{array}{rl} 3x + 4y & \longrightarrow 3(1) + 4(2) = 11 \\ x - 2y & \longrightarrow (1) - 2(2) = -3 \\ \hline 3x^2 + 4xy & \\ \quad - 6xy - 8y^2 & \\ \hline 3x^2 - 2xy - 8y^2 & 3(1)^2 - 2(1)(2) - 8(2)^2 = -33 \end{array}$$

En efecto: $(11)(-3) = -33$

175

Verificación de una identidad:

$$(3x - 4)(5x + 7) = 15x^2 + x - 28 \qquad x \in \mathbb{Z}$$

Para $x = 2$:

$$[3(2) - 4][5(2) + 7] = 15(2)^2 + (2) - 28$$
$$2 \cdot 17 = 60 + 2 - 28$$
$$34 = 34 \leftarrow \text{proposición cerrada verdadera}$$

1.8.9.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.8.9

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el valor numérico de un polinomio para sustitutos dados, en $\mathbb{Z}$, de las indeterminadas.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO MEOR KC 100